STAGE – PREMIÈRE ANNÉE DE MASTER

Titre : Les invariants symétriques du centralisateur d'un élément nilpotent.

Encadrant : Thibault Juillard (chercheur post-doctoral, Université de Hambourg).

Stagiaire : Ren Grégoire (étudiant, ENS Paris-Saclay).

Institution d'accueil : Université de Hambourg.

Sujet de stage

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie, définie sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, que l'on suppose réductive. Soit f un élément nilpotent dans $\mathfrak{g}$. En guise d'exemple, on peut choisir $\mathfrak{g}$ comme étant Mat_n, l'ensemble des matrices carrées de taille n (un entier non-nul), et f est alors une matrice nilpotente que l'on peut choisir sous une forme normale de Jordan.

On note par $\mathfrak{g}^f$ l'ensemble des éléments dans $\mathfrak{g}$ qui commutent avec f. On note par $\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}^f$ la $\mathbf{C}$-algèbre commutative librement engendrée par $\mathfrak{g}^f$: on peut la voir concrètement comme l'algèbre des polynômes en $\dim(\mathfrak{g}^f)$ variables. On a une action naturel, par le crochet de Lie, de $\mathfrak{g}^f$ sur $\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}^f$. On peut considérer la sous-algèbre des polynômes invariants, que l'on note $(\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}^f)^{\mathfrak{g}^f}$.

Question 1. Est-ce que l'algèbre $(\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}^f)^{\mathfrak{g}^f}$ est libre, c'est à dire isomorphe à une algèbre de polynômes en un certain nombres de variables ?

Si $f = 0$, il s'agit du Théorème de Chevalley ([Hum72, Theorem 23.1] et [TY05, Théorème 31.1.6]) et c'est un résultat classique dans un cours sur les algèbres de Lie réductives.

Panyushev, Premet et Yakimova ont montré que la réponse est oui dans le cas où $\mathfrak{g}$ est Mat_n et f est n'importe quelle matrice nilpotente [PPY07]. En particulier iels donnent une condition suffisante pour sur $\mathfrak{g}$ et f pour que la réponse soit positive [PPY07, Theorem 0.3]. Leurs méthodes utilisent des techniques de géométrie de Poisson algébrique.

Cependant il y a des cas où $(\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}^f)^{\mathfrak{g}^f}$ n'est pas une algèbre libre. Yakimova a pu expliciter un contre exemple en prenant $\mathfrak{g}$ de type E_8 et f un élément nilpotent minimal [Yak07]. Un autre contre-exemple a été proposé par Charbonnel et Moreau [CM16]. Ces dernier et dernière ont introduit la notion de *bon élément nilpotent*, et démontré que la réponse à la Question 1 est positive pour ces bons éléments [CM16 ; CM17].

Lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de la forme Mat_n et f est un élément nilpotent correspondant à un tableau de Young de forme rectangulaire, alors $\mathfrak{g}^f$ est une *algèbre de Takiff*. Ce sont des algèbres de Lie de la forme

$$\mathfrak{g}_m \coloneqq \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[t]/(t^{m+1}),$$

où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive et m un entier naturel. La Question 1 se pose aussi pour ces algèbres, avec cette fois-ci une réponse toujours positive : Raïs et Tauvel ont montré que $(\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}_m)^{\mathfrak{g}_m}$ est une algèbre libre [RT92].

L'idée de ce stage d'initiation à la recherche est d'étudier les travaux qui ont été réalisé autour de la Question 1. Voici des exemples de directions que l'on pourra explorer.

Objectif 1. Si $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}_n$ et f est une matrice nilpotente, Brown et Brundan ont fourni une démonstration de la liberté de $(\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}^f)^{\mathfrak{g}^f}$ et ont produit des générateurs explicites, en introduisant une tranche transverse à la Kostant–Slodowy [BB09, Theorem 4.1].

On étudiera leur démonstration, que l'on pourra comparer aux résultats classiques de Chevalley et Kostant [Kos78]. On calculera également des exemples explicites de leur construction.

Objectif 2. On étudiera la démonstration de Raïs et Tauvel pour les algèbres de Takiff $\mathfrak{g}_m$ et on calculera des exemples explicites de générateurs pour $(\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}_m)^{\mathfrak{g}_m}$.

Si f est une matrice nilpotent correspondant à un tableau de Young rectangulaire, alors $(\mathrm{Mat}_n)^f$ est une algèbre de Takiff. Cela nous conduit à la question suivantes : est-ce que les constructions de [RT92] et [BB09] fournissent des générateurs similaires ou complètement différents ?

Objectif 3. Les articles [PPY07 ; Yak07 ; CM16] fournissent des conditions suffisantes de nature géométrico-algébriques. On s'évertuera à comprendre ce que signifient ces conditions et comment les tester sur des exemples concrets. On pourra alors essayer d'exhiber un nouvel exemple ou contre-exemple à la Question 1.

La poursuite de ces objectifs sera l'occasion de s'introduire à la théorie des algèbres de Lie réductives sur le corps des nombres complexes et leurs orbites nilpotentes, ainsi que leur propriétés en termes combinatoires et de géométrie algébrique. Des références classiques pour ces sujets sont [Hum72 ; CM93 ; TY05]. Pour ce problème en particulier, on pourra aussi consulter l'article de survol de Moreau [Mor17]. On s'efforcera aussi d'effectuer des calculs concret et explicites sur ces objets théoriques, en s'aidant de langages de programmation adaptés (Mathematica, GAP...).

Il n'est pas attendu de remplir pleinement tous ces objectifs, le sujet est aussi vaste que passionnant, et certainement pas facile pour un-e étudiant-e de M1. Il motiveront l'acquisition de nombreuses connaissance utiles pour un-e étudiant-e souhaitant poursuivre son M2 ou son doctorat dans l'étude des algèbres de Lie. Bonne chance !

Références

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* T. Vol. 9. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972, p. xii+169.

[TY05] Patrice Tauvel et Rupert W. T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups.* Springer, 2005.

[PPY07] Dmitri Panyushev, Alexander Premet et Oksana Yakimova. "On symmetric invariants of centralisers in reductive Lie algebras". In : *J. Algebra* 313.1 (2007), p. 343-391. ISSN : 0021-8693,1090-266X. DOI : 10.1016/j.jalgebra.2006.12.026. URL : https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.12.026.

[Yak07] Oksana Yakimova. "A counterexample to Premet's and Joseph's conjectures". In : *Bull. Lond. Math. Soc.* 39.5 (2007), p. 749-754. ISSN : 0024-6093,1469-2120. DOI : 10.1112/blms/bdm060. URL : https://doi.org/10.1112/blms/bdm060.

[CM16] Jean-Yves Charbonnel et Anne Moreau. "The symmetric invariants of centralizers and Slodowy grading". In : *Math. Z.* 282.1-2 (2016), p. 273-339. issn : 0025-5874,1432-1823. doi : 10.1007/s00209-015-1541-5. url : https://doi.org/10.1007/s00209-015-1541-5.

[CM17] Jean-Yves Charbonnel et Anne Moreau. "The symmetric invariants of centralizers and Slodowy grading II". In : *Algebr. Represent. Theory* 20.6 (2017), p. 1341-1363. issn : 1386-923X,1572-9079. doi : 10.1007/s10468-017-9690-3. url : https://doi.org/10.1007/s10468-017-9690-3.

[RT92] Mustapha Raïs et Patrice Tauvel. "Indice et polynômes invariants pour certaines algèbres de Lie". In : *J. Reine Angew. Math.* 425 (1992), p. 123-140. issn : 0075-4102,1435-5345. doi : 10.1515/crll.1992.425.123. url : https://doi.org/10.1515/crll.1992.425.123.

[BB09] Jonathan Brown et Jonathan Brundan. "Elementary invariants for centralizers of nilpotent matrices". In : *J. Aust. Math. Soc.* 86.1 (2009), p. 1-15. issn : 1446-7887,1446-8107. doi : 10.1017/S1446788708000608. url : https://doi.org/10.1017/S1446788708000608.

[Kos78] Bertram Kostant. "On Whittaker vectors and representation theory". In : *Inventiones Mathematicae* 48 (juin 1978), p. 101-184. doi : 10.1007/BF01390249.

[CM93] David H. Collingwood et William M. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras.* Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993, p. xiv+186. isbn : 0-534-18834-6.

[Mor17] Anne Moreau. "Centralizers of nilpotent elements and related problems, a survey". In : *Perspectives in Lie theory.* T. 19. Springer INdAM Ser. Springer, Cham, 2017, p. 331-346. isbn : 978-3-319-58970-1 ; 978-3-319-58971-8.